STAT0041: Stochastic Calculus

Homework 1 - Preliminaries

Lecturer: Weichen Zhao | Fall 2025

1. 设ξ_n是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$上的单调随机变量序列，且$\xi_n$依概率收敛于$\xi$. 证明：$\xi_n$几乎处处收敛于$\xi$。

2. (Jensen不等式) 设ξ是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$上的可积随机变量，$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子事件域，$\phi$是凸函数且$\phi(\xi)$可积。证明：

$$\phi(\mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}]) \le \mathbb{E}[\phi(\xi)|\mathscr{G}].$$

3. 设$p \ge 1$, $\{\xi_n, n = 1,2,\dots\}$, $\xi \subset L^p(\mathscr{F})$, 且$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$. $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$是一个子-$\sigma$代数。证明：

$$\mathbb{E}[\xi_n|\mathscr{G}] \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[\xi|\mathscr{G}].$$

Hint: 运用上一题结论。

4. 设$\xi,\eta \in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$，若$\xi,\eta$同分布，且$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \eta$，证明：$\xi = \eta$。

5. (Doob不等式) 设ξ是带滤子流概率空间$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathrm{P})$上的可积随机变量，证明：对任意$c > 0$,

$$P(\sup_n |\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n]| > c) \leqslant \frac{1}{c}\mathbb{E}[|\xi|].$$

Hint: 考虑事件：

$$A_n := \{\omega : \xi_1 \leqslant c, \cdots, \xi_{n-1} \leqslant c, \xi_n > c\},$$

$$A = \{\sup_n |\mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_n]| > c\}.$$

那么有$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.